

Mécanique des solides

Examen 21 Mai 2012 – Durée 1h30

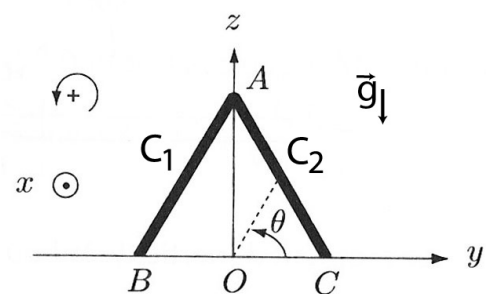
L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.

NB : les vecteurs sont notés en gras

Etude dynamique et énergétique d'une échelle

Dans le référentiel $R (Oxyz)$, (Oz) étant la verticale ascendante, on s'intéresse à une échelle double modélisée par 2 tiges identiques homogènes (masse m , longueur ℓ) AB et AC , articulées sans frottement en A (cf. figure), de centre de masse respectivement C_1 et C_2 .

On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.



Eléments cinétiques

1. Si l'échelle glisse, quelle est la nature du mouvement de C_1 et de C_2 ? En déduire l'expression des modules des vecteurs-vitesses de C_1 et C_2 par rapport à R .
2. Etablir l'expression du moment d'inertie pour la tige AB par rapport à l'axe (C_1x) .
3. En déduire l'expression du moment d'inertie pour la tige AC par rapport à l'axe (C_2x) .

Energétique

On considère dans cette partie que l'échelle est posée sur le sol sans vitesse initiale, A se trouvant suivant l'axe (Oz) à une distance h du sol et que **l'échelle glisse sans frottement sur le sol** et on repère la position de l'échelle par l'angle θ .

4. Quel(s) est (sont) le(s) degré(s) de liberté ?
5. Que dire de l'énergie mécanique de l'échelle ?
6. Déterminer l'énergie cinétique ε_K de l'échelle.
7. Déterminer l'énergie potentielle ε_p de l'échelle.
8. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
9. Etablir l'intégrale première du mouvement et montrer que l'équation différentielle du mouvement de l'échelle s'écrit : $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \cos\theta = 0$.

Dynamique

On suppose maintenant que les contacts en B et C entre l'échelle et le sol s'effectuent **avec frottement** et on note μ le coefficient de frottement. Un homme H de masse M monte sur l'échelle AB à une distance x du sommet A.

On notera : $\mathbf{N}_B, \mathbf{T}_B$ et $\mathbf{N}_C, \mathbf{T}_C$ les actions de contact de l'échelle sur le sol respectivement en B et C, et $\mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z$ les actions de contact en A de la barre AB sur la barre AC .

10. Etablir les équations vectorielles du principe fondamental de la dynamique (PFD = théorème du centre de masse + théorème du moment cinétique en A) qui traduisent **l'équilibre** de l'échelle. Montrer en particulier que l'on a la relation $T_B = -T_C$.

11. Sachant que les modules des actions normales de contact \mathbf{N}_B et \mathbf{N}_C respectivement en B et C s'écrivent :

$$N_B = g \left(m + \frac{M}{2} \left(1 + \frac{x}{\ell} \right) \right) \quad \text{et} \quad N_C = g \left(m + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \right)$$

et en appliquant le théorème du moment cinétique en A à la **barre AC seule**, établir les expressions de T_B et de T_C .

12. Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement solide dans le cas de l'équilibre du solide. En déduire quelle barre glisse en premier.

13. HORS BAREME : Montrer que quand l'homme monte vers le sommet de l'échelle, la stabilité de celle-ci diminue.